Über die Translationen der Halbverbände.

Von G. SZÁSZ und J. SZENDREI in Szeged.

1. Unter einem *Halbverband* H versteht man eine kommutative Halbgruppe mit lauter idempotenten Elementen. Eine eindeutige Abbildung λ $(x \to \lambda(x); x \in H)$ eines Halbverbands H in sich heißt eine *Translation* von H, wenn für sie

$$\lambda(xy) = \lambda(x)y$$

besteht. Ist c ein festgewähltes Element von H, so ist insbesondere die Abbildung $x \to cx$ nach $c(xy) = (cx)y$ eine Translation von H. Eine solche Translation wird *speziell* genannt und mit c_S bezeichnet (d. h. $c_S(x) = cx$).

Der erstgenannte Verfasser hat neulich einige Ergebnisse über die Translationen von Halbverbänden gewonnen[1]). In dieser Arbeit werden wir weitere Eigenschaften dieser Abbildungen untersuchen. In § 2 geben wir zwei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine eindeutige Abbildung eines Halbverbands in sich eine Translation ist (Satz 1 und 2). Satz 3 beschäftigt sich mit der Struktur der Translationen von H und mit der Einbettung von H in diese Struktur. Satz 4 in § 3 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Hüllenoperation[2]) von H eine Translation ist.

2. Eine Charakterisierung der Translationen von H liefert der folgende

Satz 1. *Eine eindeutige Abbildung λ eines Halbverbands H in sich ist dann und nur dann eine Translation von H, wenn*

$$\lambda(x)y = \lambda(x)\lambda(y) \tag{1}$$

identisch gilt.

---

1) G. Szász, Die Translationen der Halbverbände, *Acta Sci. Math.*, 17 (1956), 165—169.

2) Für die Definition der Hüllenoperationen s. § 3.

Beweis. Es sei λ eine Translation. Durch wiederholte Anwendung der Definition und der Halbverbandsaxiome bekommt man

$$\lambda(x)y=\lambda(x)\lambda(x)y=\lambda(x)\lambda(xy)=\lambda(x)\lambda(yx)=$$
$$=\lambda(x)\lambda(y)x=\lambda(x)x\lambda(y)=\lambda(xx)\lambda(y)=\lambda(x)\lambda(y),$$

womit die Notwendigkeit der Bedingung (1) bewiesen ist.

Umgekehrt folgt aus (1), daß

$$\lambda(xy)=\lambda(xy)\lambda(xy)=\lambda(xy)xy=\lambda(xy)x\cdot y=\lambda(xy)\lambda(x)\cdot y=$$
$$=\lambda(x)\lambda(xy)\cdot y=\lambda(x)xy\cdot y=\lambda(x)x\cdot y=\lambda(x)\lambda(x)\cdot y=\lambda(x)y,$$

d. h. daß λ eine Translation von H ist. Damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

Eine andere Charakterisierung der Translationen gewinnt man durch den

Satz 2. *Die Translationen eines Halbverbands H sind genau diejenigen eindeutigen Abbildungen von H in sich, die mit sämtlichen speziellen Translationen vertauschbar sind.*

Beweis. Ist λ eine beliebige und c_S eine spezielle Translation von H, so gilt

$$\lambda c_S(x)=\lambda(c_S(x))=\lambda(cx)=\lambda(xc)=\lambda(x)c=c\lambda(x)=c_S(\lambda(x))=c_S\lambda(x)$$

für jedes Element x von H, d. h.

$$\lambda c_S=c_S\lambda. \tag{2}$$

Ist umgekehrt λ eine eindeutige Abbildung von H in sich, so daß (2) für jede spezielle Translation gilt, dann ergibt sich

$$\lambda(xy)=\lambda(yx)=\lambda(y_S(x))=\lambda y_S(x)=y_S\lambda(x)=y\lambda(x)=\lambda(x)y.$$

Das bedeutet, daß λ eine Translation von H ist. Der Satz 2 ist bewiesen.

Ferner beweisen wir den folgenden

Satz 3. *Die Menge T_H aller Translationen eines Halbverbands H ist ein Halbverband, und die Menge S_H der speziellen Translationen von H bildet in T_H ein Ideal, das mit H isomorph ist.*

Beweis. Zuerst haben wir zu zeigen, daß das Produkt von zwei beliebigen Translationen wieder eine Translation ist. Das folgt einfach aus der Definition der Translation, nämlich

$$\lambda\mu(xy)=\lambda(\mu(xy))=\lambda(\mu(x)y)=\lambda(\mu(x))y=\lambda\mu(x)y.$$

Zum Beweis der übrigen Behauptungen von Satz 3 brauchen wir die in sich selbst interessante Gleichung

$$\lambda\mu(x)=\lambda(x)\mu(x), \tag{3}$$

die sich sofort aus der Definition der Translation ergibt:

$$\lambda\mu(x) = \lambda(\mu(xx)) = \lambda(\mu(x)x) = \lambda(x\mu(x)) = \lambda(x)\mu(x).$$

Durch Einsetzung $\mu = \lambda$ in (3) bekommt man $\lambda^2(x) = \lambda(x)$, d. h. die Idempotenz der Translation λ. Ferner folgt nach (3)

$$\lambda\mu(x) = \lambda(x)\mu(x) = \mu(x)\lambda(x) = \mu\lambda(x),$$

was die Kommutativität der Multiplikation in T_H bedeutet. Da die Multiplikation von Abbildungen immer assoziativ ist, haben wir bewiesen, daß T_H in der Tat ein Halbverband ist.

Da das Produkt von zwei speziellen Translationen nach

$$c_S d_S(x) = c_S(d_S(x)) = c(dx) = (cd)x = (cd)_S(x) \tag{4}$$

wieder speziell ist, folgt nach dem obigen, daß die Menge S_H aller speziellen Translationen ein Teilhalbverband von T_H ist. Wir wollen zeigen, daß S_H mit H isomorph ist, und zwar wird ein geeigneter Isomorphismus durch

$$c \rightarrow c_S \qquad (c \in H, c_S \in S_H) \tag{5}$$

vermittelt. Die Eindeutigkeit der Abbildung (5) ist trivial. Um die Ein-eindeutigkeit der Abbildung (5) zu beweisen, nehmen wir an, daß $c_S = d_S$, d. h.

$$cx = dx \qquad (x \in H)$$

gilt. Wird in diese Gleichung erstens $x = c$, zweitens $x = d$ eingesetzt, so entsteht wegen der Idempotenz und Kommutativität

$$c = dc = cd = d.$$

Das beweist die Ein-eindeutigkeit der Abbildung (5). Endlich folgt die Homomorphie der Abbildung (5) einfach aus (4), womit die Isomorphie

$$H \approx S_H \qquad (c \rightarrow c_S)$$

bewiesen ist.

Wir haben noch zu beweisen, daß S_H ein Ideal in T_H ist. Wegen (2) genügt es zu zeigen, daß $\lambda c_S \in S_H$ $(\lambda \in T, c_S \in S_H)$ gilt. Man kann aber diese Behauptung von

$$\lambda c_S(x) = \lambda(c_S(x)) = \lambda(cx) = \lambda(c)x = (\lambda(c))_S(x)$$

ablesen. Damit haben wir den Beweis des Satzes 3 beendet.

Auf Grund des Satzes 3 nennen wir T_H den *Translationshalbverband* von H. Aus Satz 3 folgt das

Korollar 1. *Jeder Halbverband läßt sich in seinen Translationshalbverband als Ideal einbetten.*

Sätze 1 und 3 geben das folgende

Korollar 2. *Jede Translation eines Halbverbands ist ein idempotenter Endomorphismus.*

Mit Hilfe der Sätze 2 und 3 bekommt man das

Korollar 3. *In der Halbgruppe sämtlicher eindeutiger Abbildungen von H in sich ist T_H der maximale Halbverband, der S_H umfaßt.*

3. Wie üblich, definieren wir im Halbverband H eine Halbordnung dadurch, daß $x \leqq y$ $(x, y \in H)$ dann und nur dann ist, wenn $xy = y$ gilt. Nach dieser Definition ist offenbar $x, y \leqq xy$ $(x, y \in H)$.

Eine eindeutige Abbildung λ eines Halbverbands H in sich heißt eine *Hüllenoperation*, wenn sich die Bedingungen

$$x \leqq \lambda(x), \tag{6}$$

$$\lambda^2(x) = \lambda(x), \tag{7}$$

$$\text{aus } x \leqq y \text{ folgt } \lambda(x) \leqq \lambda(y) \tag{8}$$

für beliebige Elemente x, y von H erfüllen. Nach der Definition der Halbordnung von H darf man (6) auch in der Form

$$\lambda(x)x = \lambda(x) \tag{9}$$

schreiben.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den

Satz 4. *Eine Hüllenoperation λ eines Halbverbands H ist dann und nur dann eine Translation von H, wenn die Gleichung* (1) *für jedes Paar $x < y$ $(x, y \in H)$ gilt.*

Beweis. Aus Satz 1 folgt sofort, daß die Bedingung notwendig ist.

Umgekehrt, sei λ eine Hüllenoperation von H, für die die Bedingung des Satzes 4 besteht, und seien x, y beliebige Elemente von H. Wegen $x \leqq xy$ gilt dann

$$\lambda(x)xy = \lambda(x)\lambda(xy); \tag{10}$$

und zwar, im Fall $x < xy$ ergibt sich (10) nach der Voraussetzung bezüglich λ und im Fall $x = xy$ einfach aus (9). Da auch $y \leqq xy$ ist, so folgt nach (9), (6) und (8)

$$\lambda(x)xy = \lambda(x)y \leqq \lambda(x)\lambda(y) \leqq \lambda(x)\lambda(xy). \tag{11}$$

Vergleicht man nun (10) und (11), so gewinnt man, daß im letzteren überall das Gleichheitszeichen stehen muß; insbesondere ist $\lambda(x)y = \lambda(x)\lambda(y)$. Nach Satz 1 ist damit bewiesen, daß die Bedingung auch hinreichend ist.

(Eingegangen am 19. März 1957.)